Граничин Олег Николаевич,
Павленко Дмитрий Валентинович

РАНДОМИЗАЦИЯ ДАННЫХ И l_1-ОПТИМИЗАЦИЯ

Аннотация

В последнее время активно развивается новая парадигма кодирования/декодирования многоразрядных сигналов, имеющих «разреженное» (sparse) представление в некотором базисе. Она опирается на идеи рандомизации измерений и l_1-оптимизации. Предложенные недавно новые методы получения и представления сжимаемых данных в англоязычной литературе называются «Compressive Sensing» (опознание по сжатию).

Ключевые слова: рандомизированные измерения, l_1-оптимизация, восстановление разреженных сигналов.

1. ВВЕДЕНИЕ

В XX веке слово «информация» стало термином во множестве научных областей, получив особые для них определения и толкования. Для обсуждения приведем некоторые из широкоиспользуемых [5].

Информацией (от лат. informatio – «научение», «сведение», «оповещение») называется опосредованный формами связи результат отражения изменяемого объекта изменяющимся с целью сохранения их системной целостности. В материальном мире информация материализуется через свой носитель и благодаря ему существует. Материальный носитель придает информации форму. В процессе формообразования производится смена носителя информации.

Данные (от лат. data) – это представление фактов и идей в формализованном виде, пригодном для передачи и обработки в некотором информационном процессе. Данные – это выделенная (из системы, благодаря обособленности существования носителя) информация.

Знание – в философском смысле: понимание осознанного чувства; в широком смысле: совокупность понятий, теоретических построений и представлений, адекватно отражающих объективные закономерности реального мира.

Фундаментальная проблема – связать воедино понятия *информация, данные, знания*. Одна из формулировок этой проблемы следующая: как получить *знания*, обеспечивающие восстановление необходимой субъекту *информации* x по имеющимся *данным* y. Достаточно часто можно упрощенно считать, что существенная информация об исследуемом явлении $x \in \mathbb{X}$ связана с имеющимися данными $y \in \mathbb{Y}$ через понимание закономерностей явления – знание (оператор) $\Phi : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$:

$$y = \Phi x \quad (= \Phi(x)).$$

Если оператор Φ обратим, то он обеспечивает исчерпывающие знания для полного восстановления x по y.

При линейной зависимости $y, x \in \mathbb{R}^N$ и невырожденной $N \times N$ матрице Φ из матричной алгебры хорошо известно, что $x = \Phi^{-1}y$.

Для открытых систем типичным является случай, когда данные подвержены влиянию неконтролируемых возмущений

$$y = \Phi x + \xi.$$

Выделение слагаемого ξ с философской точки зрения подчеркивает влияние на данные y других явлений вне определяемых x. Даже при отсутствии прямого внешнего воздействия последнее соотношение более естественное с практической точки зрения. Обычно получение данных – процесс взаимодействия x с некоторой измерительной системой, у которой есть свои характеристики, совокупное влияние которых объединяет ξ.

При незначительном уровне внешних возмущений ξ (или при их затухающем характере) задача о восстановлении x по y сводится к проблеме обращения оператора Φ, что обычно достигается за счет увеличения количества наблюдений: при $x \in \mathbb{R}^N$ выбирают $m > N$ и $y \in \mathbb{R}^m$.

При существенных внешних возмущениях ξ обычно используется статистическая постановка задачи, возможности решения которой при $m >> N$ детально изучены в рамках традиционной математической теории планирования экспериментов [7]. При этом обычно внешние возмущения считают реализацией некоторой последовательности независимых случайных величин с нулевым средним значением. Однако в приложениях это допущение часто нарушается, что может сильно сказываться на работе традиционных оценочных процедур. На первый взгляд, это кажется удивительным, но задача о восстановлении x может быть эффективно решена и в случае нецентрированных, коррелированных и даже неслучайных помех [6; 16] за счет случайного выбора матрицы Φ. Идея использования случайных регрессоров для устранения эффекта смещения была выдвинута Р. Фишером [15] в виде рандомизированного принципа планирования эксперимента. Помимо задачи планирования эксперимента, в которой регрессоры могут быть рандомизированы экспериментатором, случайные входы возникают во многих задачах идентификации, фильтрации, распознавания и т. д.

В монографии [6] делаются общие выводы о том, что *рандомизация* процесса измерений позволяет

– устранить эффект смещения и

– уменьшить количество итераций, а значит, и наблюдений.

Какова размерность N в типичных случаях? Считается, что современная теория информации берет начало со знаменитой *Теоремы Котельникова* [10] (*Найквиста-Шеннона* в англоязычной литературе), которая гласит, что, если аналоговый сигнал $x = \{f(t) : t \in \mathbb{R}\} \in L_2(\mathbb{R})$ имеет ограниченный спектр, то он может быть восстановлен однозначно и без потерь по своим дискретным отсчетам, взятым с частотой более удвоенной максимальной частоты спектра $\omega_{\max}$, или (формулируя иначе) по отсчетам, взятым с периодом меньше полупериода максимальной частоты спектра $\omega_{\max}$

$$f(t) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} y_i sinc\left(\pi\left(\omega_{\max} t - i\right)\right),$$

где $y_i = f\left(i/\omega_{\max}\right)$ – отсчеты функции $f(t)$ (мгновенные значения функции, значения дискретизированного сигнала в каждый из моментов времени $i/\omega_{\max}$), $sinc(t) = \frac{\sin(t)}{t}$.

В XXI веке резко увеличились объемы обрабатываемой информации. В значительной степени это связано с массовым переходом к обработке потоков двумерных (2-D) и трехмерных (3-D) данных.

В современных приложениях для цифровых фото и видеокамер традиционное требование о необходимой частоте измерения настолько высоко, что слишком большое количество получающихся данных надо существенно сжимать перед хранением или пересылкой. В других приложениях, включая системы отображения (медицинские сканеры и радары) и быстродействующие аналого-цифровые конвертеры, увеличение частоты измерений очень дорого.

Сложность традиционных методов квантования сигналов возрастает по экспоненциальному закону с ростом размерности. Квантование 1-D сигналов при $N = 10^3$ отсчетов соответствует 10^6 в случае 2-D, а в 3-D – 10^9, что уже слишком велико.

С практической точки зрения чрезвычайно интересно исследовать возможности восстановления $x \in \mathbb{R}^N$ по $y \in \mathbb{R}^m$ при

$$m << N,$$

что, конечно же, нереализуемо в общем случае. Но в последнее время на смену традиционной теории обработки сигналов приходит новая парадигма *Compressive Sensing* (CS, «опознание по сжатию»), позволяющая достаточно точно восстанавливать «разреженную» (sparse) информацию x [12; 14]. Англоязычный термин *compressive sensing* за последние пять лет стал уже общеупотребимым. В [9] предложен перевод на русский язык – *сжатые измерения*. Б.Т. Поляк на одном из научных семинаров в ИПУ предложил использовать термин *опознание*, который, по нашему мнению, точнее отражает специфику нового подхода.

Основная цель этой статьи – разъяснить читателям эту новую парадигму, основанную на сохраняющих структуру сигнала неадаптивных рандомизированных (случайных) линейных проектированиях, по результатам которых информация восстанавливается, используя методы l_1-оптимизации: x находится как решение оптимизационной задачи следующего вида

$$\|x\|_1 = \sum_j |x[j]| \to \min : y = \Phi x .$$

Новая методика базируется на определенном (обычно рандомизированном) выборе матрицы измерений и том, что получающийся в результате l_1-оптимизации вектор $\hat{x}$ имеет не более m ненулевых компонент, то есть – сильно разреженный. Последний факт был установлен в студенческой курсовой работе одного из авторов при решении проблемы о построении l_1 оптимального стабилизирующего регулятора неминимальнофазового объекта, первоначально представленной в [3], позже в журнале «Автоматика и телемеханика» было дано развернутое объяснение с детальной геометрической интерпретацией [1]. Через три года похожий результат был опубликован в «IEEE Trans. on Automat. Control» [13].

Статья организована следующим образом. После введения в следующем разделе дается формализованная постановка задачи. В третьем разделе описываются возможные способы решения и анализируются возникающие проблемы. Далее разбираются практические примеры и в заключении обсуждаются перспективы. Структура статьи во многом следует [4].

Представленные в статье идеи могут использоваться для иллюстрации связей между получением данных, сжатием, сокращением размерности и оптимизацией в учебных курсах на разных уровнях при подготовке выпускников в областях цифровой обработки информации, статистике и прикладной математике.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В достаточно общем виде можно считать, что интересующая исследователя информация x генерирует некоторый сигнал[1] f, взаимодействие которого с регистрирующими приборами можно наблюдать, и получать данные y, по которым исследователь может пытаться восстанавливать (оценивать) x (см. рис. 1). Во многих практических приложениях исходное понятие информации x

Рис. 1. Схема получения и обработки данных

[1] Использование термина *сигнал* из области телекоммуникаций – дань традиции. В действительности речь может идти о данных любой природы.

может быть описано существенно проще, чем фактически наблюдаемые исследователем сигналы f. Например, для принятия решения в некоторой системе управления надо знать, что в регистрирующем канале появился сигнал в виде некоторой акустической или электромагнитной волны. Интересен просто ответ на вопрос *да/нет* – один бит, в то время как поступающий сигнал может иметь сложную форму и быть распределенным во времени и пространстве – многоразрядный вектор. Учет именно такого рода специфики лежит в основе новой парадигмы обработки информации CS, активно развивающейся в последнее время.

Сжимаемые сигналы. Рассмотрим вещественный одномерный дискретный сигнал f конечной длины. Его значения составляют $N \times 1$ вектор-столбец в $\mathbb{R}^N$ с элементами $f[n]$, $n = 1, 2, ..., N$. (Будем рассматривать 2D-изображения или данные больших размерностей векторизованными в длинный одномерный вектор.) Любой сигнал в $\mathbb{R}^N$ может быть разложен по некоторому базису из векторов $\{\psi_j\}_{j=1}^N$ размерности $N \times 1$. Для простоты предположим, что этот базис ортонормированный. Используя $N \times N$ матрицу базиса $\Psi = (\psi_1, \psi_2, ..., \psi_N)$ со столбцами из векторов $\{\psi_j\}$, сигнал f может быть выражен как

$$f = \Psi x = \sum_{j=1}^{N} x[j]\psi_j, \qquad (1)$$

где x – $N \times 1$ вектор-столбец весовых коэффициентов $x[j] = \langle x, \psi_j \rangle = \psi_j^T x$ и $\cdot^T$ обозначает транспонирование.

Очевидно, что f и x – эквивалентные представления одной и той же информации. Обычно f называют представлением во временной (или пространственной) области, а x – в Ψ-области.

Сигнал f называется s-редким *(s-sparse)*, если он является линейной комбинацией только s базисных векторов, то есть только s коэффициентов $x[j]$ в (1) отличны от нуля, а остальные $(N - s)$ – нули.

Интересен случай, когда $s << N$. Для таких s-редких сигналов можно считать, что их представление в соответствующей Ψ-области и является той существенной информацией, которую они в себе несут. Эта информация однозначно определяется двумя наборами из s натуральных (индексов) и вещественных (значений) чисел.

Наряду с определением s-редких сигналов будем использовать и более общее понятие сжимаемого сигнала. Сигнал f называется *сжимаемым*, если у него есть представление в виде формулы (1), в которой только несколько коэффициентов $x[j]$ достаточно велики, а большинство остальных – малы.

Трансформирующее кодирование и его неэффективность. Тот факт, что сжимаемые сигналы хорошо аппроксимируются s-редкими представлениями, лежит в основе трансформирующего кодирования, с которым многие уже сталкиваются даже в быту, используя JPEG, MP3, MPEG форматы представления изображений, мелодий и видео. В системах получения данных (например, цифровые фото и видеокамеры) трансформирующее кодирование играет центральную роль: по полученной полной N-выборке сигнала f комплект коэффициентов преобразования $\{x[j]\}$ вычисляется через $x = \Psi^T f$, после чего из x локализируют s больших компонент, а остальные $N - s$ отбрасывают. В итоге кодируются s значений и номера их мест. К сожалению, эффективность этого подхода «сначала полная выборка – потом сжатие» страдает тремя врожденными недостатками.

Во-первых, начальный размер выборки N может быть чрезвычайно большим, даже если размер s получаемого набора компонент является малым.

Во-вторых, все N коэффициентов преобразования $\{x[j]\}$ должны быть вычислены даже при том, что от большинства кроме s из них в результате откажутся.

В-третьих, дополнительно должны быть закодированы местоположения s больших коэффициентов.

Задача опознания по сжатию (Compressive Sensing). Перечисленные выше недостатки трансформирующего кодирования снимаются при использовании нового подхода *опознания по сжатию* (Compressive Sensing, CS) за счет прямого получения сжатого представления сигнала без промежуточной стадии получения N-выборки.

Рассмотрим общий линейный процесс измерения, который вычисляет $m < N$ внутренних скалярных произведений между f и некоторой коллекцией векторов $\{a_i\}_{i=1}^m$:

$$y_i = \langle a_i, f \rangle.$$

Соберем результаты y_i в $m \times 1$ вектор-столбец y, а из транспонированных векторов измерений a_i^T сформируем строки матрицы A размерности $m \times N$. Подставляя Ψ из (1), выражение для y можно переписать в виде

$$y = Af = A\Psi x = \Phi x, \qquad (2)$$

где $\Phi = A\Psi$ – матрица $m \times N$. Матрица A фиксирована и не зависит от сигнала f (процесс измерения неадаптивен).

Задача опознания по сжатию (Compressive Sensing) состоит в проектировании

– такой универсальной матрицы измерений A, что существенная информация о любом s-редком (или сжимаемом сигнале) не будет повреждена при сокращении размерности от $f \in \mathbb{R}^N$ к $y \in \mathbb{R}^m$;

– алгоритма реконструкции, восстанавливающего x (а следовательно, и f) только по $m \sim s$ измерениям (или по примерно такому же числу измерений, как передаваемое число коэффициентов при традиционном трансформирующем кодировании).

3. РЕШЕНИЕ

Проектирование универсальной матрицы измерений. Матрица измерений A должна позволять реконструкцию сигнала f длины N по меньшему числу измерений $m < N$ (по вектору y). Поскольку $m < N$, то эта задача – плохообусловленная. Если, однако, f – s-редкий вектор и местоположения s отличных от нуля коэффициентов в x известны, то задача может быть разрешимой при $m \geq s$. Необходимое и достаточное условие разрешимости такой упрощенной задачи состоит в том, чтобы для некоторого $0 < \lambda < \infty$ и для любого вектора z, у которого выделяются те же s ненулевых компонент, как и у x, выполнялись неравенства

$$\lambda^{-1}\|z\|_2 \leq \|\Phi z\|_2 \leq \lambda\|z\|_2. \qquad (3)$$

То есть матрица $\Phi = A\Psi$ должна сохранять длины таких специфических s-редких векторов. (Здесь и далее $\|z\|_\rho = \left(\sum_{j=1}^N |z[j]|^\rho\right)^{1/\rho}$, $\rho = 1, 2$). Конечно, в общем случае местоположения s вхождений отличных от нуля компонент в x неизвестны. Однако, выполнение условия (3) для произвольных $2s$-редких векторов z является достаточным для обеспечения возможности стабильного решения задачи для любого s-редкого вектора x. В справедливости этого легко убедиться, проведя доказательство «от противного». В качестве однозначного правила декодирования можно выбрать следующее: среди всех векторов x, таких, что $y = \Phi x$, выбираем тот, у которого меньше всего ненулевых коэффициентов. Пусть у задачи есть два различных решения x' и x''. Очевидно, что каждое из них имеет не более, чем s ненулевых компонент. Вектор $\bar{x} = x' - x''$ является $2s$-редким, так как вектора x', x'' – s-редкие. Но в силу линейности $\Phi\bar{x} = \Phi x' - \Phi x'' = 0$, а, значит, в силу (3), имеем $\bar{x} = 0$, то есть $x' = x''$. Получили противоречие.

Свойства, похожие на (3), в литературе называют *«ограниченной изометрией»* (*RIP*, Restricted Isometry Property). Условия *RIP* для $2s$-редких векторов неробастные в том смысле, что их выполнения недостаточно для восстановления

– произвольного s-редкого сигнала при наблюдениях y с помехами

или

– сжимаемого сигнала с малыми, но ненулевыми ($N - s$) компонентами.

В этих случаях достаточными являются условия *RIP* для $3s$-редких векторов в том смысле, что

$$\| x - \hat{x} \|_1 \le const \| x - x^* \|_1 ,$$

где $\hat{x}$ – результат восстановления x, а x^* – вектор, полученный из x обнулением всех кроме s наибольших по модулю компонент.

Наряду с условияти *RIP* в CS используется условие малости взаимной зависимости $\mu(A; \Psi)$ строк $\{a_i\}$ матрицы A и столбцов $\{\psi_j\}$ матрицы Ψ, называемое *«некогерентностью»* A и Ψ, выполнение которого требует, чтобы строки матрицы A не могли редко представлять столбцы Ψ (и наоборот). В CS широко используется факт, что случайные матрицы A сильно некогерентны с любым фиксированным базисом Ψ.

Прямое построение матрицы измерений A такой, чтобы $\Phi = A\Psi$ обладала свойством *RIP* требует проверки выполнения условия (3) для каждой из $C_N^s = \dfrac{N!}{s!(N-s)!}$ возможных комбинаций вхождений s отличных от нуля компонент в вектор z длины N. Однако оказалось, что выполнение свойства *RIP* может быть достигнуто с высокой вероятностью просто за счет выбора случайной матрицы в качестве A (рандомизации процесса наблюдения). При этом вектор результатов измерений y представляет собой просто набор m различных линейных комбинаций компонент f со случайно выбранными весами.

Случайная $m \times N$ матрица измерений A с независимыми и одинаково распределенными (i.i.d.) элементами $a[i, j]$ с нормальной плотностью распределения с нулевыми средними и дисперсией $1/m$ имеет два интересных и полезных свойства:

1) если

$$m \ge c_1 s \log(N/s), \tag{4}$$

то матрица A удовлетворяет *RIP* с вероятностью $\ge 1 - 2e^{-c_2 m}$, где c_1, $c_2 > 0$ – малые постоянные (следовательно, s-редкие и сжимаемые сигналы длины N могут быть с высокой вероятностью восстановлены только по $m << N$ случайным измерениям);

2) матрица A *универсальна* в том смысле, что не только существенная информация о любом s-редком (или сжимаемом сигнале) не будет повреждена при сокращении размерности от $f \in \mathbb{R}^N$ к $y \in \mathbb{R}^m$, но и матрица $\Phi = A\Psi$ будет случайной матрицей с нормально распределенными i.i.d. элементами, и, таким образом, Φ будет обладать свойством *RIP* со столь же высокой вероятностью независимо от выбора ортонормированного базиса Ψ.

Результат о выполнении с высокой вероятностью условия *RIP* из свойства (4) случайной матрицей A во многом опирается на существенно более ранние работы [8; 2].

Для CS можно использовать и другие случайные матрицы измерений:

– случайная выборка i.i.d. элементов $a_{i,j}$ по симметричному распределению Бернулли $P\left(a_{i,j} = \pm 1/\sqrt{m}\right) = \dfrac{1}{2}$;

– случайная выборка i.i.d. элементов $a_{i,j}$, когда $a_{i,j} \in \left\{0, \pm\sqrt{3/m}\right\}$ с одинаковой вероятностью 1/3;

– равномерная случайная выборка N столбцов на единичной сфере в $\mathbb{R}^m$;

– случайная выборка проектора P и его нормализация $A = \sqrt{\dfrac{N}{m}} P$. Выполнение *RIP* обеспечивается условием (4) со своей постоянной c_1, зависящей от выбранного способа генерации случайной матрицы A. На практике достаточно часто хорошо работают системы с $m \approx 4s$.

С ростом N существенной трудностью становится хранение $m \times N$ элементов матрицы A, требующей $O(mN)$ единиц памяти. Другими примерами матриц, удовлетворяющих условиям *RIP*, являются

– случайные «вырезки» по m строк из $N \times N$ матриц дискретного преобразования Фурье (DFT)

– или матриц Вандермонда, соответствующих интерполяции в различных N точках. Для таких случайных матриц размер требуемой памяти может быть сокращен до $O(m \log N)$. Если строки матрицы A являются случайной выборкой из транспонированных столбцов ортонормированного базиса, полученного после ортогонализации N случайных векторов равномерно и независимо выбранных из единичной сферы $\mathbb{R}^N$, то для выполнения с высокой вероятностью свойства *RIP* достаточно выбрать m:

$$m \geq Cs(\log N)^4.$$

Наиболее существенным недостатком свойства *RIP* является его труднопроверяемость при больших m. В настоящее время предпринимаются активные попытки по его замене на более конструктивные.

Проектирование алгоритма реконструкции сигнала. Алгоритм реконструкции сигнала должен по m измерениям (по вектору y), случайной матрице измерений A (или по случайному закону, который ее генерировал) и базису Ψ восстановить сигнал f длины N или, эквивалентно, соответствующий ему разреженный вектор коэффициентов x. Так как $m < N$ в (2), то для s-редких сигналов имеется бесконечно много векторов x', которые удовлетворяют $\Phi x' = y$. Это объясняется тем, что если $\Phi x = y$, то $\Phi(x+r) = y$ для любого вектора r из нулевого подпространства $\mathcal{N}(\Phi)$ матрицы Φ. Поэтому цель алгоритма реконструкции сигнала – найти вектор коэффициентов разреженного представления сигнала в $(N - m)$-размерном сдвинутом нулевом подпространстве $\mathcal{H} = \mathcal{N}(\Phi) + x$.

Реконструкция через l_2-минимизацию. Классический подход к решению обратных задач рассматриваемого типа состоит в том, чтобы найти в сдвинутом нулевом подпространстве $\mathcal{H}$ вектор с наименьшей нормой (энергией) l_2:

$$\hat{x} = \arg\min \|x'\|_2 : \ \Phi x' = y.$$

Решение этой оптимизационной задачи может быть записано в удобной форме метода наименьших квадратов $\hat{x} = \Phi^T\left(\Phi\Phi^T\right)^{-1} y$. К сожалению, результат l_2-минимизации почти никогда не будет s-разреженным вектором, а будет содержать много элементов отличных от нуля.

Реконструкция через l_0-минимизацию. Поскольку l_2-норма измеряет энергию сигнала, а не его разреженность, то можно рассмотреть задачу l_0-минимизации, в которой ищется вектор x : $\Phi x = y$ с минимумом ненулевых компонент. По результату решения такой оптимизационной задачи можно восстановить s-редкий сигнал точно с высокой вероятностью, используя только $m = s + 1$ i.i.d. случайных измерений. К сожалению, задача l_0-оптимизации невыпуклая и относится к комбинаторному типу, вычислительные процедуры по ее решению численно неустойчивы и *NP*-сложные, требуя огромного перебора всех C_N^s возможных вариантов размещения ненулевых элементов в x.

Реконструкция через l_1-минимизацию. Удивительно, но оптимизация, основанная на l_1-норме:

$$\hat{x} = \arg\min \|x'\|_1 : \ \Phi x' = y.$$

с высокой вероятностью позволяет точно восстанавливать s-редкие сигналы и хорошо приближать сжимаемые сигналы, используя только $m \geq c_1 s \log(N/s)$ i.i.d. случайных измерений. Это задача выпуклой оптимизации, которую можно свести к задаче линейного программирования.

Для решения можно использовать метод внутренней точки (вычислительная сложность порядка $O(N^3)$ или симплекс-метод (теоретически экспоненциальная сложность), который на практике оказывается относительно быстрым.

Геометрическая интерпретация. Геометрическое представление задачи CS в $\mathbb{R}^N$ помогает визуализировать, почему восстановление через решение задачи l_2-оптимизации проваливается при поиске разреженного решения, которое может быть идентифицировано при реконструкции по l_1-оптимизации.

Набор всех s-редких векторов x в $\mathbb{R}^N$ является сильно нелинейным пространством, состоящим из всех s-мерных гиперплоскостей, которые простираются по координатным осям, как показано на рис. 2*a*. Сдвинутое нулевое подпространство $\mathcal{H} = \mathcal{N}(\Phi) + x$ ориентировано под случайным углом, задаваемым рандомизацией в матрице Φ, как показано на рис. 2*b*. (На практике N, m, $s >> 3$ и трехмерные интуитивные рассуждения не должны вводить в

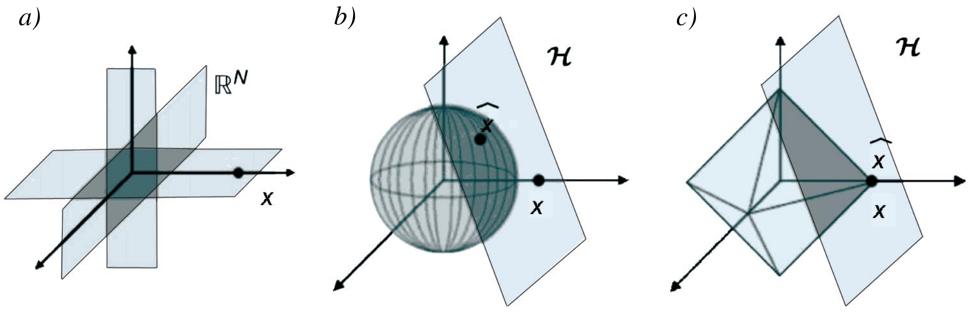

Рис. 2. *a)* Пространство 2-редких векторов в $\mathbb{R}^3$ состоит из трех плоскостей, содержащих по две координатные оси;
b) l_2-минимизация находит неразреженный вектор $\hat{x}$, далекий от x;
c) l_1-минимизация находит разреженную точку $\hat{x}$ контакта l_1-шара с гиперплоскостью $\mathcal{H}$, с высокой вероятностью совпадающую с x

заблуждение.) Результат минимизации l_2- нормы – ближайшая к началу координат точка на $\mathcal{H}$, которая может быть найдена расширением гиперсферы (l_2-шара) до касания $\mathcal{H}$. Из-за случайной ориентации $\mathcal{H}$ эта самая близкая к началу координат точка $\hat{x}$ с высокой вероятностью будет далеко от осей координат и, следовательно, не будет ни s-редкой, ни близкой к правильному ответу x. Напротив, l_1-шар на рис. 2*c* является выпуклой комбинацией точек, лежащих на осях координат. Поэтому при расширении l_1-шара в трехмерном пространстве в контакт со сдвинутым двумерным нулевым подпространством $\mathcal{H}$ сначала войдет точка, лежащая на осях координат ($s = 1$), которая в точности совпадает с точкой расположения искомого разреженного вектора x.

4. ПРИМЕРЫ

1. Предположим, что исследуется спектрально разреженный сигнал со сверхширокой полосой пропускания

$$f(t) = \sum_{j=0}^{N} x[j] \exp^{i2\pi jt/N}, \quad t = 0, \ldots, N-1,$$

где N – очень большое число, но количество ненулевых компонент $x[j]$ меньше либо равно s (которое будем предполагать сравнительно малым: $s \ll N$). На рис. 3 приведен пример соответствующего сигнала при $s = 5$ с дополнительными случайными нормально распределенными помехами с единичной дисперсией.

В рассматриваемой задаче неизвестно, какие частоты активны, и мы не знаем их амплитуд. Так как набор активных частот совсем необязательно является подмножеством последовательности целых чисел, теория Котельникова/Найквиста/Шеннона совершенно бесполезна (так как нельзя априори ограничить возможную ширину полосы пропускания, то следует считать, что все N значений нужны). Но новая парадигма CS гарантирует получение с высокой вероятностью точной информации о частотах и амплитудах по сравнительно небольшой $m \sim s \log (N/s)$ выборке значений $f(t)$. Более того, эти значения не должны как-то специально выбираться, алгоритм восстановления будет эффективно работать с почти любым их набором соответствующего размера. Иллюстрирующий пример восстановления при $m = 320$ приведен на рис. 4.

2. В [11] рассмотрен интересный пример однопиксельной сжимающей цифровой камеры, которая непосредственно получает m случайных линейных измерений без предварительного сбора значений всех N пикселей исходной картинки. Исходящие от картинки f световые волны отражаются от

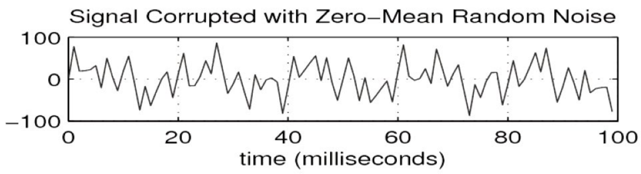

Рис. 3. 5-редкий сигнал с помехой

специального устройства цифровых микрозеркал и собираются второй линзой, фокусируясь на один фотодиод (один пиксель).

Каждое микрозеркало может независимо ориентироваться или к фотодиоду (соответствует 1) или в сторону от фотодиода (соответствует 0). Для того, чтобы собрать измерения, с помощью генератора случайных чисел устанавливаются псевдослучайные ориентации микрозеркал, создающие измерительный вектор a_i из 1/0. Итоговое напряжение на фотодиоде равняется величине y_i, которая является внутренним произведением между a_i и изображением f. Процесс повторяется m раз для получения всех компонент y.

3. При использовании CS для сжатия/восстановления картинок или видео полезно то свойство, что алгоритмы сжатия гораздо менее ресурсоемки, нежели алгоритмы реконструкции. Такая ситуация прямо противоположна той, которая в настоящее время сложилась в области сжатия видео. Новая парадигма CS позволяет, например, так организовать передачу информации между мобильными устройствами ограниченной вычислительной мощности: сжать на мобильном устройстве, передать на сервер, там с помощью мощных ресурсов сервера восстанавить и заново сжать информацию, но уже классическими алгоритмами трансформирующего кодирования, после чего передать на другое мобильное устройство.

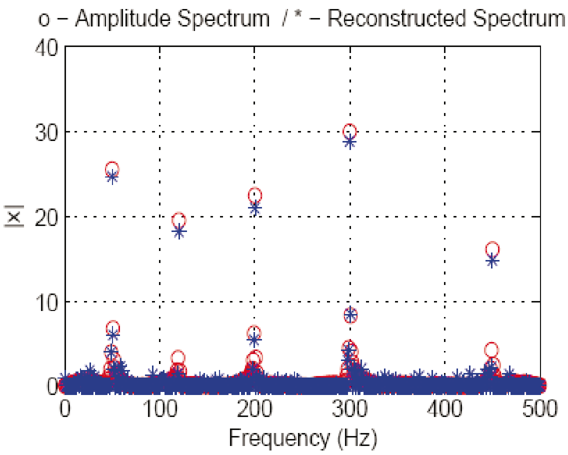

Рис. 4. Определение частот и амплитуд 5-редкого сигнала

4. В задачах обучения оказывается, что при решении вопроса об отнесении входного сигнала к тому или иному классу, можно в случае априорной информации о разреженности сигналов не проводить операции восстановления сигнала, а ограничиться решением аналогичной задачи в пространстве существенно меньшей размерности.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Получение сигнала, основанное на CS, может быть более эффективно, чем традиционное осуществление выборки для редких или сжимаемых сигналов.

В Compressive Sensing хорошо известная оценка метода наименьших квадратов (МНК) неадекватна для хорошей реконструкции сигнала, и потому используются другие типы выпуклой оптимизации.

В статье обсуждения фокусировались на дискретных сигналах f, но парадигма Compressive Sensing (Compressive Sampling) применяется и к s-редким (или сжимаемым) аналоговым сигналам $f(t)$, которые могут быть представлены или приближены использованием только s из N возможных элементов некоторого непрерывного базиса или словаря $\{\psi_j(t)\}_{j=1}^{N}$. В то время, как каждый базисный элемент $\psi_j(t)$ может иметь большой разброс частот, аналоговый сигнал $f(t)$ имеет только s степеней свободы и, таким образом, также может быть измерен в существенно меньшем количестве точек.

Литература

1. *Барабанов А.Е., Граничин О.Н.* Оптимальный регулятор линейного объекта с ограниченной помехой // Автоматика и телемеханика. 1984. № 5. С. 39–46.

2. *Гарнаев А.Ю., Глускин Е.Д.* О поперечниках евклидова шара // Докл. АН СССР. Т. 277. 1984. № 5. С. 200–204.

3. *Граничин О.Н.* Оптимальное управление линейным объектом с нерегулярными ограниченными помехами // В сб.: Тезисы докладов и сообщений Всесоюзной конференции «Теория адаптивных систем и её применения». М.–Л., 1983. С. 26.

4. *Граничин О.Н.* Рандомизация измерений и l_1-оптимизация // Стохастическая оптимизация в информатике. Изд-во С.-Петерб. ун-та. 2009. Вып. 5. С. 3–23.

5. *Граничин О.Н., Кияев В.И.* Информационные технологии в управлении. М.: Бином. 2008. 336 с.

6. *Граничин О.Н., Поляк Б.Т.* Рандомизированные алгоритмы оценивания и оптимизации при почти произвольных помехах. М.: Наука, 2003. 293 с.

7. *Ермаков С.М., Жиглявский А.А.* Математическая теория оптимального эксперимента. М.: Наука, 1987. 320 с.

8. *Кашин Б.С.* Поперечники некоторых конечномерных множеств и классов гладких функций // Изв. АН СССР. Сер. Матем. Т. 42. 1977. № 2. С. 334–351.

9. *Кашин Б.С., Темляков В.Н.* Замечание о задаче сжатого измерения // Мат. заметки. Том 82. 2007. № 6. С. 829–837.

10. *Котельников В.А.* О пропускной способности эфира и проволоки в электросвязи // Всесоюзный энергетический комитет. Материалы к I Всесоюзному съезду по вопросам технической реконструкции дела связи и развития слаботочной промышленности. 1933. Репринт статьи в журнале УФН. 176:7. 2006. С. 762–770.

11. *Baraniuk R.G.* Compressive Sensing // IEEE Signal Processing Magazine. Vol. 52. № 2. July 2007. P. 118–120, 124.

12. *Candes E., Romberg J., Tao T.* Robust uncertainty principles: Exact signal reconstruction from highly incomplete frequency information // IEEE Trans. Inform. Theory. Vol. 52. № 2. Feb. 2006. P. 489–509.

13. *Dahlem M., Pearson J.B.* l_1-optimal feedback controllers for MIMO discrete systems // IEEE Transactions on Automatic Control. Vol. 32. № 4. 1987. P. 314–322.

14. *Donoho D.* Compressed sensing // IEEE Trans. Inform. Theory. Vol. 52. № 4. Apr. 2006. P. 1289–1306.

15. *Fisher R.A.* The Design of Experiments. Edinburgh: Oliver and Boyd. 1935.

16. *Granichin O.N.* Linear regression and filtering under nonstandard assumptions (Arbitrary noise) // IEEE Trans. Automat. Contr. Vol. 49. oct. 2004. P. 1830–1835.

Abstract

Recently a new paradigm has been developing for the coding/decoding of multidimensional signals having sparse representation in some basis. It is based on ideas of measurement's randomization and l_1-optimization. Recently proposed new methods of obtaining and representation of the compressible data are referred to as Compressive Sensing.

Keywords: randomized measurements, l_1-optimization, sparse signals reconstruction.

Граничин Олег Николаевич,
доктор физико-математических наук, профессор кафедры Системного программирования математико-механического факультета СПбГУ,
oleg_granichin@mail.ru,

Павленко Дмитрий Валентинович,
аспирант СПбГУ,
dmit10@gmail.com